Estratto dal *Giornale di Matematica Finanziaria*.
Anno I. - Vol. I. - N. 1. - Marzo 1919.

Sulla forma dei segni di algebra.

Nota di G. Peano.

Espongo qui i principali segni usati in aritmetica e in algebra, le varie forme che alcuni hanno, la loro età, e specialmente le difficoltà tipografiche che essi presentano.

Avendo dovuto stampare molti lavori, miei e di altri, e specialmente il *Formulario matematico*, acquistai pratica nell'arte tipografica, e vidi che molte formule si possono comporre con notevole risparmio di denaro, acquistando anche in chiarezza. Già pubblicai uno scritto su questo soggetto (1).

Gli stessi consigli che qui espongo, sono pure dati dai direttori di alcuni giornali:

The London mathematical Society,
The mathematical Gazette,
Journal of the Institute of Actuaries.

***

0, 1, 2, ecc. " cifre ", che noi imparammo dagli Arabi, e questi dagli Indiani.

La forma delle cifre variò molto, e si fissò dopo l'invenzione della stampa.

(1) *L'esecuzione tipografica delle formule matematiche*, " Atti Acc. Torino ", 26 dic., 1915, ristampato nel " Bollettino di Matematica ", diretto dal professor Conti. Leibniz, in " Monitum de characteribus algebraicis ", Opera, t. III, pag. 416, pubblicò uno studio analogo sui caratteri del suo tempo.

= " eguale „, introdotto da Recorde nel 1557, usato da Newton (1660-1727), si è diffuso dappertutto, sostituendo l'iniziale della parola *aequalis* prima usata.

+ " più „ e — " meno „ comparirono verso il 1500, sostituendo le antiche iniziali di *plus* e *minus*. I libri di quel tempo sono oggi rarissimi, spesso unici. Il libro *Rara Arithmetica* di Smith contiene la fototipia dei passi più importanti di questi vecchi libri. Ivi, pag. 40, troviamo una pagina dell'Aritmetica di Widman, stampata a Lipsia nel 1489, in cui sta scritto 4 + 5 per indicare " 4 quintali e 5 libbre „. Quindi il segno + ha ivi una funzione simile alla nostra virgola decimale. I segni + e — si trovano in Stifel a. 1544, che li proclama suoi " diser meine Zeichen „, e adottati da Vieta nel 1591, si diffusero in tutto il mondo.

Più parlanti dei nostri segni convenzionali + e — erano i geroglifici egiziani. Nel libro di Ahmes, di quasi 4000 anni fa, i segni + e — hanno la forma delle gambe di un uomo che va avanti o indietro.

× " moltiplicato „, è generalmente sottinteso fra due lettere, e fra un numero e una lettera. Questo segno con questo significato si incontra in Oughtred e in Harriot 1631, e usato da Wallis, Newton, ecc. divenne universale.

Alcuni autori invece di $a \times b$ scrivono $a \,.\, b$, e attribuiscono a Leibniz (1646-1716) la forma del punto al segno di moltiplicazione. Leibniz all'opposto nel suo lavoro *De arte combinatoria* dice: " signo + designamus additionem, — subtractionem, ⌒ multiplicationem, ⌣ divisionem „. E la formula di Leibniz

$$A \frown A - 1.,, \smile 2$$

vale la nostra $(A \times (A - 1))/2$. Leibniz usò il punto e la virgola come segni di separazione, equivalenti alle nostre parentesi.

a/b e $\frac{a}{b}$ indicano la divisione; questa notazione rimonta agli Indiani, e si trova in Leonardo Pisano 1202. Le due forme sono egualmente facili a scriversi, ma sono di difficoltà tipografica

ben differente. La prima a/b unilineare, si compone come testo corrente; la seconda invece esige tre linee di composizione, per fissare rispettivamente a, b, e la linea di divisione. Il prezzo di composizione è triplo. Secondo la tariffa, la composizione della linea

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

importa cinque volte la spesa della formula egualmente chiara

$$1/2 - 1/3 = 1/6.$$

E la spesa di composizione, che è la principale nella stampa, diventa decupla e più, se si hanno frazioni sopra frazioni.

La forma a/b è vivamente consigliata da tutti i direttori di giornali citati, e adottata in molti libri specialmente inglesi; però si usa ancora la forma trilineare, quando numeratore e denominatore sono espressioni lunghe.

La notazione a/b ha pure il vantaggio di potersi scomporre in a e $/b$, sicchè $/b$ rappresenta il reciproco di b, ordinariamente indicato con $1/b$.

Già tutti scrivono $-b$ invece di $0 - b$.

L'indicazione del reciproco con un segno già si trova nel papiro egiziano di Ahmes, e fu riproposta da Macfarlane nel 1887.

È pure in uso la notazione $a : b$ per a/b; la si incontra in Leibniz, Eulero.

Nella teoria delle proporzioni si scrive $a : b :: c : d$ per indicare " a sta a b come c sta a d ". Poi si è cambiato il segno :: " come " in $=$, e allora $a : b$ ha assunto il significato di a/b, e la relazione fra i 4 enti diventò l'eguaglianza di due funzioni di quei quattro.

La notazione $a \div b$ per a/b, che si trova in Pell 1668, Maclaurin 1742, è oggi rarissima. Il segno $a \div b$ è usato in molti libri di ingegneria per indicare l'intervallo da a a b, indicato pure con $a^{-}b$.

$>$ " maggiore " e $<$ " minore " si trovano in Harriot 1631, e sostituirono segni prima usati.

a^m " a elevato m ". Questa notazione si trova in Cartesio 1637, e sostituì notazioni antiche. Se l'esponente è una lettera, e fu fusa sul corpo del testo, qui corpo 10, la composizione di a^m è unilineare, come un testo corrente.

Altrimenti il tipografo prende l'esponente in corpo metà, cioè 5, in altra cassa, e la composizione consta di due linee. Se poi questo esponente porta altro esponente od indice, allora non esiste corpo che sia la metà della metà di 10; bisognerà comporre base ed esponente o indice dello stesso corpo, e non si distingueranno più bene l'uno dall'altro. E se l'esponente è fratto o multilineare, la composizione diventa difficile, molto costosa e non chiara.

Pell 1659, De Morgan 1845, introdussero un segno per *elevato*. Nel Formulario citato, a^m si scrive anche a ⊦ m; il segno *elevato* ha circa la forma di √ capovolta.

Hamilton a. 1845 scrive exp x " esponenziale di x ", per e^x, ove e indica la base dei logaritmi naturali. Questa notazione è molto diffusa fra gli autori inglesi di matematica pura e applicata, inclusa la scienza attuariale. Allora $a^m = \exp(m \log a)$, e ogni espressione esponenziale si riduce a composizione unilineare. Si possono semplificare le formule, senza introdurre segni meno noti, indicando con lettere le espressioni che diventano complicate.

La stessa difficoltà tipografica degli esponenti presentano gli indici, che si scrivono in corpo metà, a destra in basso; peggio poi per indici a sinistra in basso e in alto, come si usano in attuaria. La successione dei segni di una formula costituisce sempre una serie lineare, che nella composizione corrente forma una retta orizzontale. Usando indici in alto e in basso, a destra e a sinistra, si formano spezzate, che possono riempiere più volte il foglio.

La notazione: $u_0 \; u_1 \; u_2$ ecc.
equivale a $u(0) \; u(1) \; u(2)$
che si può scrivere $u0 \; u1 \; u2$

soppresse le parentesi inutili, come faceva Lagrange. Qui u è una funzione e non c'è pericolo di ambiguità col prodotto.

√a e $\sqrt{a}$ indicano la radice quadrata di a; il segno è l'iniziale di *radix* usata sotto forma maiuscola o minuscola o deformata

fin dal 1500. Il tratto orizzontale sul radicando esige una linea di composizione, ed è inutile; non si trova più nei libri moderni, specialmente inglesi.

$^3\surd a$ e $\sqrt[3]{a}$ sono notazioni per la radice cubica, egualmente chiare; la seconda importa una linea di più, cioè doppio prezzo, e causa di errori.

( ) " parentesi e chiusa " furono usate sotto questa forma e col valore attuale, da Eulero. Sostituirono con grande vantaggio tipografico il *vinculum* usato per lo stesso scopo da Chuquet 1500, Leibniz, Newton, ... Questi scrivevano $a \times \overline{b + c}$ invece del nostro $a \times (b + c)$. Leibniz usava pure i punti e le parentesi.

Questi vincoli si sono conservati fino a noi nelle radici. Quindi $\sqrt{a + b}$ soppresso il vincolo diventa $\surd(a + b)$. Anche la linea di frazione ha alcune volte il valore di vincolo; così $\frac{a}{b + c}$ si scriverà $a/(b + c)$.

Molti storici attribuiscono le parentesi a Girard a. 1629, il quale invece usò questo antico segno ortografico per indicare le potenze e radici. Così egli scrive " multipliez $\surd 5$ par rc 4 viendra $\left(\frac{1}{6}\right)2000$ " che significa $\surd 2 \times {}^3\surd 4 = {}^6\surd 2000$.

Bombelli a. 1579 usò in sostanza le parentesi sotto forma L diritta e rovesciata, iniziale della parola *ligamen*. Egli scrive

R. q. L 15. p. R. q. 80⅂ e R. c. L R. q. 2. p. 1⅂

col nostro valore: $\surd\ (15 + \surd\ 80)$ e $^3\surd\ (\surd\ 2 + 1)$.

Convenuto che le parentesi hanno l'ufficio di indicare le parti di una formula, lo scrivere (x) per indicare la parte intera di x o altra sua funzione può produrre ambiguità.

Per separare la parte intera dalla decimale di un numero, da noi si scrive la virgola, come 3,14. Gli inglesi scrivono un punto in alto, cioè 3·14; e ·12 vale il nostro 0,12; questa notazione è anche diffusa sul continente; e non si presta ad ambiguità; poichè 1, 2 significa pure la coppia dei numeri 1 e 2. Anticamente si usava il punto in basso, e si trova ancora nei logaritmi di Köhler; allora 1.2 si confonde con 1 × 2.

Sono pure in uso molti altri simboli di minore importanza [1].

[1] La storia del simbolismo algebrico si trova, insieme a tante altre co-

Ciò che rende costosa la composizione tipografica delle formule algebriche è la loro forma multilineare. Perciò tutti gli editori dei periodici citati consigliano, quando è possibile senza staccarsi troppo dall'uso della maggioranza, di preferire la forma unilineare, e ciò per ragioni di minor costo, maggior chiarezza ed eleganza tipografica, e minor lavoro nella correzione.

---

gnizioni utilissime, in YOUNG, *I concetti fondamentali dell'Algebra e della Geometria*, versione e note di Domenico Mercogliano, Manuali Pierro, Napoli, anno 1919.